Réf: Brezis

Développement :

Théorème de Riesz Fisher :

Leçons 205
234
241
201
239

Théorème :

L^p est un espace de Banach $\forall\ 1 \leq p \leq +\infty$.

Preuve :

$\boxed{\text{Si } p = +\infty}$

Soit (f_n) suite de Cauchy dans L^∞. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\exists N_k \in \mathbb{N}$ tq

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \quad \text{pour } m,n \geq N_k.$$

Ainsi $\exists$ E_k négligeable (i.e. de mesure nulle) tq

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k \text{ et } \forall m,n \geq N_k.$$

Posons $E = \bigcup_k E_k$, E négligeable (comme union dénombrable d'ensembles négligeables).

Alors $\forall x \in \Omega \setminus E$, (f_n) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet.

On obtient donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ $\forall x \in \Omega \setminus E$. On passe à la limite dans l'inégalité quand $m \to +\infty$ et on a $\forall x \in \Omega \setminus E$, $\forall n \geq N_k$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \Rightarrow |f(x)| \leq |f_n(x)| + \frac{1}{k}$$

Ainsi $f \in L^\infty$ et $\|f - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k}$ $\forall n \geq N_k$ (en passant au sup). Par conséquent, $\|f - f_n\|_{L^\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{\text{Si } 1 \leq p \leq +\infty}$

Soit (f_n) suite de Cauchy dans L^p. Pour conclure, il suffit de montrer que cette suite admet une valeur d'adhérence (car borné + une valeur d'adhérence $\Rightarrow$ cv vers celle-ci) :

On extrait une sous suite (f_{n_k}) telle que $\forall k \geq 1$,

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad (\text{existe car } (f_n) \text{ de Cauchy})$$

On va montrer que f_{n_k} converge dans L^p. Pour simplifier les notations, on écrit f_k au lieu de f_{n_k}. On a donc $\forall k \geq 1$

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Posons $g_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|^p \right)^{1/p}$

et on obtient :

$$\|g_n\|_{L^p}^p = \int_\Omega |g_n(x)|^p dx = \int_\Omega \left| \left(\sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|^p \right)^{1/p} \right|^p$$

Fubini positif

$$= \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|^p$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega |f_{k+1}(x) - f_k(x)|^p$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \|f_{k+1} - f_k\|_{L^p}^p \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k \right)^p$$

et donc $\|g_n\|_{L^p} \leq 1$.

Rappel : Beppo Levi :
- (f_n) mesurable
- (f_n) positive
- $\hookrightarrow \int \lim f_n = \lim \int f_n$

Corollaire :
- Si $\int f_n$ sont tous majorés par un même réel, alors $\lim_{n\to+\infty} f_n \in L^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$

Par le théorème de convergence monotone, (g_n) converge presque partout sur Ω vers $g \in L^p$. D'autre part $\forall m \geq n \geq 2$:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \dots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$$

$$\leq g_m(x) - g_{n+1}(x)$$

$$\leq g(x) - g_{n+1}(x) \quad (*)$$

$\leftarrow$ cette ligne donne (f_n) converge vers f pour $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$\leq g(x)$$

On sait que (f_n) est de Cauchy et converge vers f, dans $\mathbb{L}^p$.

On a presque partout sur Ω et $\forall n \geq 2$ (en passant à $m \to +\infty$)

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \Rightarrow |f(x)| - |f_n(x)| \leq g(x) \Rightarrow |f(x)| \leq \underbrace{|f_n(x)|}_{\in L^p} + \underbrace{g(x)}_{\in L^p}$$

On a donc que $f \in L^p$. On a de plus $|f_n(x) - f(x)|^p \longrightarrow 0$ p.p. *

et $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x)$, intégrable. On conclut par convergence dominée. ▨

Corollaire :

Toute suite convergente dans L^p admet une sous suite qui converge μ pp.

Preuve :

Une suite convergente est de Cauchy, et dans la preuve précédente, dans chacun des deux cas, on obtient une sous suite qui converge pp. ▨

* Dans $(*)$, on fait tendre $m \to +\infty$, on a $|f(x) - f_n(x)| \leq \underbrace{g(x) - g_{n+1}(x)}_{\downarrow 0}$

donc $|f(x) - f_n(x)|^p \longrightarrow 0 \quad \forall p$

Remarques:

On peut aussi démontrer Riesz Fischer grâce à une caractérisation des espaces complets : $(E, \|\cdot\|)$ complet $\Leftrightarrow$ toute série abs. cv converge.

preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $(E, \|\cdot\|)$ complet. $X_n = \sum_{k \geq 0} x_k$ tq $\sum_{k \geq 0} \|x_k\|$ cv

Posons $X_n' = \sum_{k \geq 0}^{n} \|x_k\|$.

$\|X_q - X_p\| = \|\sum_{k=p+1}^{q} x_k\| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\| \leq X_q' - X_p'$

Soit $\varepsilon > 0$. $\sum_{k \geq 0}^{\infty} \|x_k\|$ cv $\Rightarrow$ X_n' est de Cauchy donc $\exists N$ tq $\forall p, q > N$,

$|X_q' - X_p'| \leq \varepsilon$. On a alors $\|X_q - X_p\| \leq \varepsilon$, donc (X_n) de Cauchy

dans $(E, \|\cdot\|)$ qui est complet. Donc converge.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit (x_n) suite de Cauchy de E. Mq (x_n) possède au moins une v.a.

(x_n) étant de Cauchy, on peut construire de proche en proche φ tq

$\varphi(0) = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = \min \{ k > \varphi(n-1)$ tq $\forall l \in \mathbb{N}, \|x_{k+l} - x_k\| < \frac{1}{2^n} \}$.

Ainsi $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leq \frac{1}{2^n}$.

Soit $u_0 = x_0$, $u_n = x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n-1)}$. Ainsi $x_{\varphi(n)} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

$\|u_k\| \leq \frac{2}{2^k}$ ainsi $\sum_{k \geq 0} \|u_k\|$ cv. Et donc $x_{\varphi(n)}$ cv dans E.

(x_n) est une suite de Cauchy qui possède une v.a. $\blacksquare$